

EX.1

① Calculer les limites :

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2} - 2}{2x-4} ; b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{2/5} - x^{8/3})$$

$$② \text{ Comparer } \alpha = \sqrt[5]{2} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{9}$$

$$③ \text{ Simplifier : } \lambda = \frac{\sqrt[10]{9\sqrt{9}} \times \sqrt[6]{27}}{\sqrt[5]{81}}$$

$$④ \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} : (E) : \sqrt[5]{3x-6} - 2 \geq 0$$

$$(F) (2x-4)^3 + 8 = 0$$

⑤ Montrer que l'équation : $x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = 0$
admet au moins une solution dans $] -1, 0 [$

EX.2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - \sqrt{x-1} ; x > 1 \\ f(x) = \sqrt{5-x} ; x \leq 1 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .2°/-a) étudier la continuité de f à gauche et à droite en $x_0 = 1$.2°-b) f est-elle continue en $x_0 = 1$? (justifier)2°-c) f est-elle continue sur \mathbb{R} ? (justifier)3°-a) Montrer que f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$ 3°-b) Calculer $f'_g(1)$ et déterminer une équation de la demi-tangenteà (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.3°-c) f est-elle dérivable sur \mathbb{R} ? (justifier).4°) Soit h la restriction de f à l'intervalle : $I =]-\infty; 1]$ 4°-a) Mq h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J 4°-b) Déterminer J puis $h^{-1}(x)$ en fonction de x .5°-a) Calculer $h(0)$; 5°-b) Mq h^{-1} est dérivable en $x_0 = \sqrt{5}$ et calculer $(h^{-1})'(\sqrt{5})$ (on donne : $h'(0) = \frac{-1}{2\sqrt{5}}$)

- * * fin * * -

EX.1 (1) (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{2x - 4}$

directement on trouve : $\frac{\sqrt[3]{8} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ (F.I.)

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{2x - 4} &= \frac{(\sqrt[3]{4x})^3 - (2)^3}{(2x - 4)((\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4)} \\ &= \frac{4x - 8}{(2x - 4)((\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4)} \\ &= \frac{2(2x - 4)}{(2x - 4)(\sqrt[3]{4x}^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4)} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{2x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt[3]{4x}^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4} \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{8}^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{2}{4 + 4 + 4} = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{2/5} - x^{8/3})$

directement on trouve : $+\infty - (+\infty)$ (F.I.)

on a : $\frac{2}{5} < 1 < \frac{8}{3}$ donc : $\frac{2}{5} < \frac{8}{3}$

on factorise par $x^{2/5}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/5} - x^{8/3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/5} \left(1 - x^{\frac{8/3 - 2/5}{1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/5} \left(1 - x^{\frac{34}{15}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/5} \left(1 - x^{\frac{34}{15}} \right) = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

car : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/5} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{34/15}) = -\infty \end{cases}$

(2) $\alpha = \sqrt[5]{2}$; $\beta = \sqrt[3]{9}$ 1

on a : $5 \times 3 = 15$ (multiple de 3 et 5)

$$\alpha^{15} = (\sqrt[5]{2})^{15} = (\sqrt[5]{2^5})^3 = 2^3$$

$$\beta^{15} = (\sqrt[3]{9})^{15} = 9^5$$

on a : $2^3 < 9^3 < 9^5$

donc : $\alpha^{15} < \beta^{15}$

ce qui donne : $\alpha < \beta$

(3) $\lambda = \frac{\sqrt[10]{9\sqrt{9}} \times \sqrt[6]{27}}{\sqrt[5]{81}}$

on a :

$$9\sqrt{9} = 3^2 \times 3 = 3^3 \text{ donc } \sqrt[10]{9\sqrt{9}} = \sqrt[10]{3^3}$$

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{9 \times 3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[2 \times 3]{3^3} = \sqrt[2]{3^1}$$

$$\sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{9^2} = \sqrt[5]{3^4} \text{ donc :}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt[10]{3^3} \times \sqrt[2]{3^1}}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{3^{\frac{3}{10}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{4}{5}}} = 3^{\frac{3}{10} + \frac{1}{2} - \frac{4}{5}}$$

$$= 3^{\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10}} = 3^{\frac{0}{10}} = 3^0 = \boxed{1}$$

(4) (E) : $\sqrt[5]{3x - 6} - 2 \geq 0$

(on cherche tout d'abord D_E l'ensemble de définition de (E))

$$x \in D_E \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{6}{3} = 2 \Leftrightarrow x \in [2; +\infty[$$

donc : $D_E = [2; +\infty[$

Soit $x \in D_E$ on a :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt[5]{3x - 6} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{3x - 6}^5 \geq 2^5 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 32$$

$$(E) \Leftrightarrow 3x \geq 32 + 6 (= 38)$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{38}{3}$$

$$\text{donc : } (x \in D_E \text{ et } x \geq \frac{38}{3})$$

$$\text{càd : } (x \geq 2 \text{ et } x \geq \frac{38}{3})$$

$$\text{donc : } x \geq \frac{38}{3} \quad \text{"Car } \frac{38}{3} > 2"$$

L'ensemble des solutions :

$$S_E = \left[\frac{38}{3} ; +\infty \right[$$

$$\text{L'équation : } (2x-4)^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-4)^3 = -8$$

$$\Leftrightarrow -(2x-4)^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow (4-2x)^3 = 8 \quad \text{et } 4-2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \text{et } 2 \geq x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 2-4 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

et comme $1 \leq 2$

donc $x = 1$ est bien une solution

donc ; l'ensemble des solutions :

$$S_F = \{1\}$$

$$\text{Req : } x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$(5) \text{ Soit : } f(x) = x^3 + 8x^2 - 4x - 4$$

• f est continue sur $[-1; 0]$ car c'est une fct polynôme

$$\bullet f(0) = -4 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 8(-1)^2 - 4(-1) - 4 = -1 + 8 + 4 - 4 = 7 > 0$$

$$\text{donc : } f(-1) \cdot f(0) < 0$$

d'après le T.V.I l'équation

$f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]-1; 0[$

Ex. 2

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - \sqrt{x-1} ; x > 1 \\ f(x) = \sqrt{5-x} ; x \leq 1 \end{cases}$$

$$1^\circ \text{ Si } x > 1 \text{ alors } x-1 > 0$$

donc $x \mapsto 3x^2 - \sqrt{x-1}$ est définie

càd : f est définie sur $]1; +\infty[$

$$\text{si } x \leq 1 \text{ alors } -x \geq -1$$

$$\text{donc } 5-x \geq 5-1 = 4$$

$$\text{donc : } 5-x \geq 0$$

donc : $x \mapsto \sqrt{5-x}$ est définie sur $]-\infty; 1]$

càd f est définie sur $]-\infty; 1]$

Conclusion : f est définie sur :

$$]-\infty; 1] \cup]1; +\infty[= \mathbb{R}$$

$$\text{donc : } D_f = \mathbb{R}$$

même Méthode :

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x-1 \geq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } (5-x \geq 0 \text{ et } x \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 1 \text{ et } x > 1) \text{ ou } (x \leq 5 \text{ et } x \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow (x > 1 \text{ ou } x \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 1] \cup]1 + \infty[$$

\mathbb{R}

donc : $D_f = \mathbb{R}$

2-a) continuité à gauche en $x_0 = 1$

on a : $f(1) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{5-x} = 2 = f(1)$$

donc f est continue à gauche en $x_0 = 1$

Continuité à droite en $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - \sqrt{x-1}) = 3 - 0 = 3 \neq f(1)$$

donc : f n'est pas continue à droite en $x_0 = 1$

2-b) f n'est pas continue en $x_0 = 1$.
justification : car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

(c-à-d : f n'est pas continue à droite)

2-c) f n'est pas continue sur \mathbb{R} car elle est non continue en $x_0 = 1$.

(on dit aussi : car elle est discontinue en $x_0 = 1$)

3-a) on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x})^2 - (2)^2}{(x-1)(\sqrt{5-x} + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5-x} + 2)} \quad [3] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x} + 2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$

3-b) d'après 3-a) on a :

$$f'_g(1) = \frac{1}{4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Le nombre} \\ \text{dérivé de} \end{array} \right)$$

f à gauche en $x_0 = 1$

Une équation de la demi-tangente :

$$(T) : \begin{cases} y = f'_g(1)(x-1) + f(1) \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'_g(1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(1) = 2$$

donc : $f'_g(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{4}(x-1) + 2$
 $= \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

par suite : $(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4} \text{ et } x \leq 1$

3-c) f n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .
car elle est discontinue en $x_0 = 1$.

Req : Proposition :

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0
 f dérivable sur $I \Rightarrow f$ continue sur I .

Résultat :

Si une fonction f n'est pas continue en x_0 ; alors elle est non dérivable en x_0 .

4°) h est la restriction de f

à $I =]-\infty; 1]$ donc :

$$\forall x \in]-\infty; 1], \quad h(x) = \sqrt{5-x}$$

4°-a) • $x \mapsto 5-x$ est continue
et positive sur I

donc $h : x \mapsto \sqrt{5-x}$ est continue
sur I

• h dérivable sur I et :

$$(\forall x \in I); \quad h'(x) = \frac{(5-x)'}{2\sqrt{5-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} < 0$$

donc h est strictement décroissante
sur I

donc h admet une fct réciproque
 h^{-1} définie sur l'intervalle $J = h(I)$

4°-b) $J = h(]-\infty; 1])$

$$= [h(1); \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)[$$

$$h(1) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5-x} = +\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5-x) = +\infty)$$

$$\text{donc : } J = [2; +\infty[$$

on calcule $h^{-1}(x)$

$$\text{Soient } x \in J = [2; +\infty[; y \in I =]-\infty; 1]$$

$$\text{on a : } h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \sqrt{5-y}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5-y \Leftrightarrow 5-x^2 = y$$

$$\text{donc : } (\forall x \in [2; +\infty[); \quad h^{-1}(x) = 5-x^2$$

5°-a) $h(0) = \sqrt{5-0} = \sqrt{5}$ 4

5°-b) • Rappel

si $\begin{cases} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases}$ alors :

f^{-1} dérivable en $f(a)$

$$\text{et } (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

$$\text{on a : } h'(0) = \frac{-1}{2\sqrt{5}}$$

donc : $\begin{cases} h \text{ est dérivable en } 0 \\ h'(0) \neq 0 \end{cases}$

$$\text{on a : } \sqrt{5} = h(0) \text{ donc :}$$

$$(h^{-1})'(\sqrt{5}) = (h^{-1})'(h(0))$$

$$= \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{5}}}$$

$$\text{par suite : } (h^{-1})'(\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$$

— ★ fin ★ —

Remarques : 2ème méthode :

3°-a) on a : $f(x) = \sqrt{5-x}; \forall x \leq 1$

et $5-x > 0$ pour tout $x \leq 1$

donc f dérivable sur $]-\infty; 1]$

en particulier : à gauche en 1.

5°-b) d'après la question 4°-b)

$$\text{on a : } \forall x \in J = [2; +\infty[; \quad h^{-1}(x) = 5-x^2$$

donc : h^{-1} dérivable sur J (car

$x \mapsto 5-x^2$ dérivable sur \mathbb{R})

$$\text{et } (h^{-1})'(x) = (5-x^2)' = -2x$$

donc : pour $x_0 = \sqrt{5}$ on a : $x_0 \in J$

$$\text{et } (h^{-1})'(\sqrt{5}) = -2 \times \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$